Psicologia (1983) IV, 1 e 2 : 57-60

# Nota sobre o problema da generalização

*ERNESTO COSTA* [1] *e YVES KODRATOFF* [2]

## 1. INTRODUÇÃO

Consideremos os seguintes problemas:

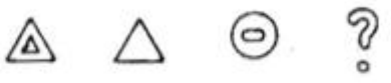
i) complete a sequência

(ij , ji) (po , op) (ed , - -)

ii) complete a série

0 1 1 2 3 5 8 –

iii) dados os objectos



A B C D

qual, de entre os cinco abaixo indicados, escolheria para ocupar a posição D?

1 2 3 4 5

1 Secção de Engenharia Electrónica
Universidade de Coimbra

2 Laboratoire de Recherche en Informatique
Université Paris-Sud

Todos nós já deparámos com problemas deste tipo, não tendo dificuldade em aceitar com solução, respectivamente, de, 13 e 4. Ela resulta da nossa capacidade de nos abstrairmos dos objectos em análise (não nos interessa fundamentalmente que se trate de letras, números ou figuras geométricas), para apenas considerarmos as *relações invariantes* entre os objectos.

Assim, no primeiro exemplo, observamos que, para os dois primeiros pares, o segundo elemento é igual ao primeiro por ordem inversa, o que nos leva a inferir que o mesmo se deve passar para o terceiro par; no segundo exemplo, basta notar que qualquer elemento é igual à soma dos dois imediatamente anteriores; no terceiro exemplo somos levados a agrupar os objectos A e B e escolhemos D por forma que a relação entre A e B seja a mesma que a relação entre C e D: passamos de A (ou C) para B (ou D) retirando o objecto do interior do objecto grande. Estritamente falando, nada obriga a esta solução, isto é, de, 13 e 4 não são a solução mas *uma* solução, de entre uma infinidade de soluções possíveis.

O que acontece é que nós somos levados a admitir que a *regularidade* encontrada se vai continuar a repetir. Esta situação passa-se com qualquer cientista quando infere indutivamente uma hipótese de lei a partir de um conjunto de factos. Isso não invalida que a hipótese necessite ser provada ou refutada sob pena de cairmos em situações como a que resulta de, a partir da observação de que o cisne A é branco e o cisne B é branco, concluirmos que *todos* os cisnes são brancos.

Ao induzir para além dos factos presentes uma lei, efectuamos uma *generalização*. Outra forma de generalização está relacionada com a *aprendizagem de conceitos*.

Consideremos o conjunto de factos:

a) Um urso, preto, pequeno é perigoso
b) Um urso, preto, médio é perigoso
c) Um cão, castanho, grande é perigoso
d) Um gato, preto, pequeno não é perigoso
e) Um cavalo, preto, grande é perigoso
f) Um cavalo, preto, médio é perigoso
g) Um cavalo, castanho, grande é perigoso

A partir deles podemos inferir que *todos os ursos pretos ou animais grandes são perigosos*. Este resultado obtém-se por generalização, isto é, tomando em consideração o que existe de comum entre os exemplos ou grupos de exemplos e abstraindo aquilo que os distingue: de a) e b) podemos concluir que todos os ursos pretos são perigosos. Este resultado será uma generalização de a) e b). Notar-se-á a existência de factos «negativos», d) e f), que funcionam como discriminantes relativamente ao conceito a aprender.

Nas secções seguintes, iremos descrever uma técnica que nos permitirá, a partir de um conjunto de factos, obter a sua generalização. Para simplificar apenas consideraremos factos «positivos».

## 2. GENERALIZAÇÃO UM-PARA-UM

Utilizaremos como factos sequências de cartas de jogar. O objectivo será, a partir de um conjunto de várias sequências de cartas, obter a sua generalização, ou seja, uma nova sequência de cartas que «contenha» todas as anteriores.

Como acontece noutras situações, é mais fácil manipular uma *representação* dos factos do que uma descrição em linguagem natural. A representação escolhida baseia-se na consideração de dois parâmetros, a saber: o *valor* da carta e o seu *naipe*. Essa informação será representada sob a forma de uma lista de três elementos ou *tripleto*. Por exemplo, o rei de paus será representado por:

```
(CARTA REI PAUS)
```

O primeiro elemento da lista serve para denotar a natureza do objecto (neste caso carta), enquanto os restantes dois elementos denotam os atributos do objecto (valor e naipe). Além de carta usaremos o predicado *sucessor* que nos permitirá indicar se o valor de duas cartas é contíguo. Assim, o facto «valete de ouros, rei de paus» será representado pelo conjunto de tripletos:

```
{(CARTA VALETE OUROS) (CARTA REI PAUS) (SUCESSOR VALETE REI)}
```

O nosso problema consistirá agora em, dados dois factos sob a forma de conjunto de tripletos, encontrar, por generalização, um terceiro conjunto de tripletos que os contenha.

Para começar, importa ver como se obtém a generalização de dois tripletos. Sejam pois tri1 = =(a1 b1 c1) e tri2 =(a2 b2 c2) dois tripletos. A sua generalização, denotada por Gen(tri1, tri2), é um terceiro tripleto definido, recursivamente, por:

i) se a1 ≠ a2 então Gen(tri1, tri2) = X, sendo X uma *variável*;
ii) se a1 = a2 então Gen(tri1, tri2) = =(a1 Gen(b1, b2) Gen(c1, c2)).

Consideremos agora o par de factos:

```
(1) {(CARTA VALETE OUROS) (CARTA REI PAUS) (SUCESSOR VALETE REI)}
(2) {(CARTA 6 ESPADAS) (CARTA 7 PAUS) (SUCESSOR 6 7)}
```

Para obter *uma generalização* de estes dois factos, começamos por associar cada tripleto do primeiro facto com um tripleto do segundo. No caso presente, *uma* solução possível será:

```
{[(CARTA VALETE OUROS), (CARTA 6 ESPADAS)];
 [(CARTA REI PAUS), (CARTA 7 PAUS)];
 [(SUCESSOR VALETE REI), (SUCESSOR 6 7)]}
```

De seguida generaliza-se *cada par* assim obtido usando i) e ii):

```
Gen((1), (2)) = {(CARTA X1 X2) (CARTA X3 PAUS) (SUCESSOR X4 X5)}
```

Para se obterem *todas* as generalizações possíveis de estes dois factos basta considerar *todas* as maneiras possíveis de associar os tripletos dos dois factos.

Uma análise mais aprofundada revela que esta forma de generalizar não é satisfatória: generalizou-se *demasiado*, uma vez que o mesmo par de elementos é generalizado de duas formas diferentes. Basta notar que o par (VALETE, 6) é generalizado em X1 (primeiro par de tripletos) e em X4 (terceiro par de tripletos)! Essa perda de informação prende-se com a inexistência de *ligação* entre os tripletos durante o processo de generalização. Esta situação pode ser remediada mediante a modificação da condição i) anteriormente anunciada: a variável X a introduzir será distinta de todas as variáveis previamente utilizadas apenas se o par (a1, a2) que a origina não tiver previamente ocorrido. Se (a1, a2) já tiver sido generalizado em Y, utiliza-se de novo esta última variável.

Daí que a nova solução para o problema seja:

Gen((1), (2)) = {(CARTA X1 X2) (CARTA X3 PAUS) (SUCESSOR X1 X3)}

que se pode traduzir em linguagem natural por: «existem duas cartas, uma de paus cujo valor é o sucessor do valor da outra carta».

Em conclusão, diríamos que, a fim de obter o *máximo* de informação comum a ambos os factos, nos interessa generalizar o *menos* possível entendido como a introdução do menor número de variáveis distintas).

Este modo de encontrar o *menor generalizado* denomina-se generalização *um-para-um*, pois *cada* tripleto de um facto é posto em correspondência com *um* tripleto de outro facto. Como veremos de seguida, nem sequer esta forma de proceder conduz ao menor generalizado.

## 3. GENERALIZAÇÃO N-PARA-UM

Suponhamos o seguinte exemplo:

(1) {(CARTA 4 OUROS) (CARTA 3 ESPADAS) (CARTA 3 OUROS)}
(2) {(CARTA 6 COPAS) (CARTA 6 ESPADAS)}

Uma generalização um-para-um obriga a «esquecer» um tripleto do primeiro facto. Uma generalização um-para-um dará:

Gen((1), (2)) = Gen({[(CARTA 4 OUROS), (CARTA 6 ESPADAS)];
[(CARTA 3 ESPADAS), (CARTA 6 ESPADAS)]})
= {(CARTA X1 X2) (CARTA x3 ESPADAS)}

Outra solução possível será:

Gen((1), (2)) = Gen({[(CARTA 3 ESPADAS), (CARTA 6 ESPADAS)];
[(CARTA 3 OUROS), (CARTA 6 COPAS)]})
= {(CARTA X1 ESPADAS), (CARTA X1 X2)}

Note-se que neste segundo caso se generaliza menos do que no primeiro.

Em linguagem natural diríamos, para o segundo caso, que «existem duas cartas com o mesmo valor, sendo uma delas de espadas».

No entanto mesmo esta segunda generalização nos faz perder informação devido à não consideração do tripleto (CARTA 4 OUROS), ou seja leva-nos a generalizar em demasiado. Basta ver que a partir de

(CARTA X1 ESPADAS) (CARTA X1 X2)

podemos obter por *instanciação* (a operação inversa da generalização) os factos 1) e 2) e ainda *todos* os conjuntos de três ou mais cartas em que duas delas têm o mesmo valor sendo uma destas duas de espadas. Mas, a partir de 1), vemos que, a existir terceira carta, ela *deve ser* do mesmo naipe daquela que não é de espadas! É esta informação que se perde ao não considerar (CARTA 4 OUROS).

Consegue-se ultrapassar este problema permitindo que um tripleto de um facto possa entrar em relação com mais de um tripleto de outro facto. Diz-se então que se efectua uma generalização *n-para-um*.

No nosso exemplo se permitirmos que (CARTA 6 COPAS) de 2) entre em relação com (CARTA 4 OUROS) e (CARTA 3 OUROS) de 1) teremos:

Gen((1), (2)) = Gen({[(CARTA 4 OUROS), (CARTA 6 COPAS)];
[(CARTA 3 ESPADAS), (CARTA 6 ESPADAS)];
[(CARTA 3 OUROS), (CARTA 6 COPAS)]})
= {(CARTA X1 X2) (CARTA X3 ESPADAS) (CARTA X3 X2)}

Esta nova generalização é o resultado pretendido. Todavia, este modo de generalizar coloca um novo problema: é necessário indicar que existe a possibilidade de uma instância da generalização originar apenas *duas* cartas (caso 2)). Uma solução consiste em *numerar* os tripletos acrescentando um (ou mais) tripletos para indicar os casos em que, eventualmente, dois tripletos se podem fundir num só. Usando esta solução, a generalização final será:

```
(1(CARTA X1 X2) 2(CÁRTA X3 ESPADAS) 3(CARTA X3 X2) 4(FUSÃO 1 3))
```

## 4. CONCLUSÃO

Apresentámos uma *técnica* que permite obter o menor generalizado de um conjunto de factos. Uma aplicação dessa técnica é a aprendizagem de conceitos a partir de exemplos. Essa técnica pode ser implementada por um programa de computador que gere todos os conjuntos de pares de tripletos a partir dos factos aplicando de seguida o princípio de generalização a cada par de tripletos.


## RESUMO

*Descrevem-se dois mecanismos de generalização empregues na aprendizagem de conceitos ou acções a partir de exemplos. Mostra-se a vantagem do mecanismo de generalização n-para-um sobre o mecanismo um-para-um quando se pretende generalizar o menos possível.*

## SUMMARY

*We describe two mechanisms of generalization used in learning by examples of concepts or actions. We show the advantage of a n-to-one generalization over a one-to-one generalization when we want to obtain a least generalization.*


## REFERÊNCIAS


HAYES-ROTH, F. e McDERMOTT, J. (1978) – «An inference matching technique for inducing abstractions», *in* Communications A.C.M., vol. 21, n5, pp 401-411.

PLOTKIN, G (1978) – «Anote on inductive generalization», *in* Machine Intelligence 5, B. Meltzer and D. Michie, Eds., American Elsevier, New York.

PLOTKIN, G. (1971) – «A further note on inductive generalization», *in* Machine Intelligence 6, B. Meltzer and D. Michie, Eds., American Elsevier, New York.

VERE, S. (1981) – «Constrained n-to-1 generalizations», Internal Report, Information Systems Research, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, CA 91103.